Opakování: Extrémy funkcí více proměnných

- Def. 55: různé typy extrémů;

Dodatek: Bod $a \in \mathbb{R}^d$ je stacionární bod fce f, jestliže $\nabla f(a) = 0$. (SB)

SB a funkce f je sedlový bod, pokud f nemá v b. a lok. extrém.

- Věta 56: (nutná p. pro lok. extrém)

Nechť $f: D_f \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Pak: $\forall i \in \{1, \dots, d\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ neexistuje.}$$

Speciálně, pokud ex. $df(a)$ ($\Leftrightarrow$ ex. $\nabla f(a)$) a a je bod lok. extrému f, pak $\nabla f(a) = 0$, tj. a je SB funkce f.

Postačující podmínky: Podmínky 2. řádu jsou formulované pomocí tzv. kvadratických forem.

KVADRATICKÉ FORMY

Definice 57: Nechť $A \in M(d \times d)$.

- Pokud $A = A^T$, říkáme, že A je symetrická.
- Pokud A je sym., fci $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ def. jako $\varphi(u) = u^T \cdot A \cdot u = (u_1, \dots, u_d) A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$ nazýváme kvadratickou formou.

$$\left(\varphi(u) = \sum_i \sum_j u_i a_{ij} u_j \right)$$

(mluvíme o KV.F. reprezentované mcí A.)

Pozn.: • $\varphi(c \cdot u) = c^2 \cdot \varphi(u)$, $c \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^d$.

- KV.F. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou tvaru $\varphi(x) = a \cdot x^2$ (pro nějaké $a \in \mathbb{R}$)
(repr. matice $A = (a)$
$\varphi(x) = x \cdot a \cdot x = a \cdot x^2$).

Definice 58: Buď $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ KV.F. Řekneme, že φ je:

(i) PD, pokud $\forall u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}: \varphi(u) > 0$.
(ii) ND $<$
(iii) PSD, pokud $\forall u \in \mathbb{R}^d : \varphi(u) \geq 0$
(iv) NSD $\leq$
(v) ID, pokud $\exists u, v \in \mathbb{R}^d : \varphi(u) > 0 \wedge \varphi(v) < 0$.

Budeme hovořit o těchto vlastnostech pro sym. mce.

Definice 59: $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d \in M(d \times d)$ je diagonální, pokud $a_{ij} = 0$, kdykoliv $i \neq j$ $(i, j \in \{1, \dots, d\})$.

(Stručně: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2\times 2)$ je diagonální.)

Věta 60: nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ je diagonální.
Pak (i) A je PD $\iff$ $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, d$
(ii) ND < 0
(iii) PSD ≥ 0
(iv) NSD ≤ 0
(v) A je ID $\iff$ $\exists i, j \in \{1, \dots, d\} : a_{ii} > 0 \wedge a_{jj} < 0$.

Důkaz: (ii): $(\Rightarrow)$ nechť A je ND. Pak pro $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$: $a_{ii} = e_i^T A \cdot e_i \overset{ND}{<} 0$

$(\Leftarrow)$ Nechť $a_{ii} < 0$, $i = 1, \dots, d$.

Nechť je dán lib. vektor $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Pak $\varphi(u) = u^T \cdot A \cdot u =$

$$= \sum_i \sum_j u_i a_{ij} u_j = \sum_i u_i a_{ii} u_i =$$

$$= \sum \underbrace{a_{ii}}_{<0} \underbrace{u_i^2}_{>0} < 0.$$

Ostatní body se dokážou podobně.

(Cv.: (v).) $\boxtimes$

Příklady:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ PD ; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\neg$PD, PSD

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ID ; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ID

Definice 61: • Sym. elementární úprava matice: el. řádková ú. následovaná „toutéž" el. sloupcovou ú.

• Sym. transformace je posloupnost konečně mnoha sym. el. úprav.

Lemma 62: Symetrická transformace zachovává symetrii matice.

Náznak důkazu: Stačí pro sym. el. úpravu.

Z LA víte, že řádkové (resp. sloupcové) úpravy matice A se dají repr. pomocí násobení mce A zleva (resp. zprava) jistou regulární mcí (reprezentující tu úpravu).

$A \rightsquigarrow CA$ (řádková) resp. $A \rightsquigarrow AC^T$ (sl.)

Tedy: Buď $A \in M(d \times d)$ sym., C matice el. úpravy. Pak provést sym. el. úpravu na A znamená spočítat CAC^T.

Je mce (CAC^T) symetrická?

Víme: $(X \cdot Y)^T = Y^T \cdot X^T$. Tedy

$$\boxed{(CAC^T)^T} = (C^T)^T A^T C^T = C \overset{\text{sym.}}{A^T} C^T$$

$$\boxed{= CAC^T} \qquad \square$$

Věta 63: nechť $A, B \in M(d \times d)$, A je sym., nechť B je výsledkem sym. transformace A. Pak B je téhož typu (PD, ND, PSD, NSD, ID) jako mce A.

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-2\times}{\ldots}$$

určete typ mce (KV.F.)

Cíl: Pomocí S.T. převést na diag. mci. Ta bude téhož typu jako A (V63). Podle V60 snadno určíme onen typ.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-2\times}{} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \overset{-3\times}{} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix} \overset{-3\times}{} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-5\times,\ \times 4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = D$$

Tedy D je ID (V60), takže

A je ID (V63).

Poznámka: Platí věta: každá symetrická mce se dá pomocí ST převést na diagonální mci

Příklad znam.:

2. krok

$$\begin{pmatrix} \boxed{1\ 2\ 3} \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \ldots \text{ID.}$$

1.

-2, -3 (row operations); -2, -3 (column operations)

Pozn.: (i), (ii) z V64: počítáme d determinantů.

(ii), (iii) z V64: počítáme mnohem více determinantů G.

Věta 64 (Sylvestrovo kritérium)

Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{d} \in M(d\times d)$ je symetrická.

(i) A je PD $\iff \forall k \in \{1,\ldots,d\}:$ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$

(hlavní minory kladné)

(ii) A je ND $\iff \forall k \in \{1,\ldots,d\}$ $(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$

(hl. m. $-, +, -, +\ldots$)

(iii) A je PSD $\iff$ pro každou k-tici

$1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k \le d$, $k \in \{1,\ldots,d\}$

je $\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \ge 0$

(iv) A je NSD $\iff \ldots$ $(-1)^k \begin{vmatrix} \ldots \end{vmatrix} \ge 0$

Důsl. 65: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ A je

(i) PD $\iff$ $a > 0 \;\wedge\; ab - c^2 > 0$

(ii) ND $\iff$ $a < 0 \;\wedge\; ab - c^2 > 0$

(iii) PSD $\iff$ $a \geq 0, b \geq 0 \;\wedge\; ab - c^2 \geq 0$

(iv) NSD $\iff$ $a \leq 0, b \leq 0 \;\wedge\; ab - c^2 \geq 0$

(v) ID ... jinak.

ZPĚT K FCÍM $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

Definice 66: Diferenciál 2. řádu fce $f \in C^3$ d proměnných v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ je KV. F. s maticí

$$d^2 f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{d} \qquad \begin{pmatrix} i \dots \text{řádek} \\ j \dots \text{sloupce} \end{pmatrix}$$

Trv. Hessova mce fce f v bodě a.

Věta 67: nechť f má na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^d$ spojité všechny PD až do řádu 3 ($f \in C^3$).

nechť a je SB fce f. (Tj. $\nabla f(a) = 0$)

Pak $d^2 f(a)$ je symetrická a platí:

(i) $d^2 f(a)$ je PD $\Rightarrow$ f má v bodě a lokální min.

(ii) ND $\Rightarrow$ lok. max.

(iii) ID $\Rightarrow$ není lok. extrém. (Tj. sedlový bod)

VÁZANÉ EXTRÉMY (přes množinu)

Věta 68: (O Lagrangeově multiplikátoru λ)
Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená a funkce f, g mají spojité derivace 1. řádu na G.
Nechť $\nabla g \neq 0$ na G.
Nechť $M = \{(x,y) \in G : g(x,y) = 0\}$.
(tj. M je „nulová vrstevnice fce g")

Potom: Pokud $(\tilde{x}, \tilde{y})$ je bodem lok. extrému f vzhledem k množině M, pak platí:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ splňující } \nabla f(\tilde{x},\tilde{y}) + \lambda \cdot \nabla g(\tilde{x},\tilde{y}) = 0.$$

(Tj. $(\tilde{x},\tilde{y})$ je bodem lok. extrému fce f $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ $\nabla f(\tilde{x},\tilde{y})$ a $\nabla g(\tilde{x},\tilde{y})$ jsou kolineární.)

Tj., rozepsáno po složkách,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0 \quad \wedge$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$$

Tedy máme 3 rovnice pro 3 neznámé $\lambda, \tilde{x}, \tilde{y}$.

$$g(\tilde{x},\tilde{y}) = 0$$

(má ležet $(\tilde{x},\tilde{y}) \in M$).